

一、求导后,一次函数含参(参数为一次项系数)。

例1:已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$,求函数 $f(x)$ 的单调区间。

分析:此题是求导后一次项系数为参数,一般先讨论 a 的取值,根与定义域之间的关系,由导函数的取值符号判断原函数的单调性。

解析: $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$

当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)>0$, 函数 $f(x)=\ln x-ax+1$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增

当 $a>0$ 时, $x\in(0,\frac{1}{a})$ 时 $f'(x)>0$, $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$ 时 $f'(x)<0$, $f(x)=\ln x-ax+1$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 单调递增,在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 单调递减。

综上所述,当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 只有增区间为 $(0,+\infty)$, 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 的增区间为 $(0,\frac{1}{a})$, 减区间为 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 。

二、求导后,二次函数含参(一项含参数)。

例2:设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$, 其中 $x\in R$, 讨论 $f(x)$ 的单调性。

分析:此题求导后参数为二次函数的二项系数,讨论 a 的取值,观察二次函数开口方向,判断两根大小确定 $f(x)$ 在各区间内的符号,根据符号判断函数在每个相应区间内的单调性。

解析: $f'(x)=2ax-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-1}{x}(x>0)$ 。

利用导数解决含参函数的单调区间问题的应用

○岑巩县第一中学 贺廷军

单调递增区间 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}a}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}a}{3},+\infty\right)$

例4:已知函数 $f(x)=2a^2\ln x-x^2(a>0)$ 。

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上零点的个数(e 为自然对数的底数)。

解析:(1) $\because f(x)=2a^2\ln x-x^2$, $\therefore f'(x)=\frac{2a^2}{x}-2x=\frac{2a^2-2x^2}{x}=\frac{-2(x-a)(x+a)}{x}$, $\therefore x>0, a>0$, 当 $0<x<a$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x>a$ 时, $f'(x)<0$ 。

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,a)$, 单调递减区间是 $(a,+\infty)$ 。

(2)由(1)得 $f(x)_{\max}=f(a)=a^2(2\ln a-1)$ 。

讨论函数 $f(x)$ 的零点情况如下:

①当 $a^2(2\ln a-1)<0$, 即 $0<a<\sqrt{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 无零点, 在 $(1,e^2)$ 上无零点;

②当 $a^2(2\ln a-1)=0$, 即 $a=\sqrt{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一零点 a , 而 $1<a=\sqrt{e}<e^2$, $\therefore f(x)$ 在 $(1,e^2)$ 内有一个零点;

③当 $a^2(2\ln a-1)>0$, 即 $a>\sqrt{e}$ 时, 由于 $f(1)=-1<0, f(a)=a^2(2\ln a-1)>0$,

$f(e^2)=2a^2\ln(e^2)-e^4=4a^2-e^4=(2a-e^2)(2a+e^2)$, 当 $2a-e^2<0$, 即 $\sqrt{e}<a<\frac{e^2}{2}$ 时, $1<\sqrt{e}<a<\frac{e^2}{2}<e^2, f(e^2)<0$, 由函数 $f(x)$ 的单调性可知, 函数 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 内有唯一零点 x_1 , 在 (a,e^2) 内有唯一零点 x_2 , $\therefore f(x)$ 在 $(1,e^2)$ 内有两个零点。

当 $2a-e^2\geq 0$, 即 $a\geq \frac{e^2}{2}>\sqrt{e}$ 时, $f(e^2)\geq 0$, 而且 $f(\sqrt{e})=2a^2\cdot\frac{1}{2}-e=a^2-e>0, f(1)=-1<0$, 由函数的单调性可知, 无论 $a\geq e^2$, 还是 $a<e^2$, $f(x)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 内有唯一的零点, 在 $(\sqrt{e},e^2)$ 内没有零点, 从而 $f(x)$ 在 $(1,e^2)$ 内只有一个零点。

综上所述, 当 $0<a<\sqrt{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上无零点; 当 $a=\sqrt{e}$ 或 $a\geq \frac{e^2}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上有一个零点; 当 $\sqrt{e}<a<\frac{e^2}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上有两个零点。

[方法总结] 利用导数研究方程根(函数零点)的技巧

(1)研究方程根的情况, 可以通过导数研究函数的单调性、最大值、最小值、变化趋势等。

(2)根据题目要求, 画出函数图像的走势规律, 标明函数极(最)值的位置。

(3)利用数形结合的思想去分析问题, 可以

使问题的求解有一个清晰、直观的整体展现。

三、求导后,二次函数含参数(两项含有参数)。

例5:已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$, 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

解析:由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+a+1}{x}$ 。

当 $a\geq 0$ 时, $f'(x)>0$, 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

当 $a\leq -1$ 时, $f'(x)<0$, 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

当 $-1<a<0$ 时, $f'(x)=0$, 解得 $x=\sqrt{\frac{-a+1}{2a}}$, 则当 $x\in(0,\sqrt{\frac{-a+1}{2a}})$ 时, $f'(x)>0$ 。当 $x\in(\sqrt{\frac{-a+1}{2a}},+\infty)$ 时, $f'(x)<0$ 。

故 $f(x)$ 在 $x\in(0,\sqrt{\frac{-a+1}{2a}})$ 上单调递增, 在 $x\in(\sqrt{\frac{-a+1}{2a}},+\infty)$ 单调递减。

综上所述, 当 $a\geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

当 $a\leq -1$ 时, 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

当 $-1<a<0$ 时, $f(x)$ 在 $x\in(0,\sqrt{\frac{-a+1}{2a}})$ 上单调递增, 在 $x\in(\sqrt{\frac{-a+1}{2a}},+\infty)$ 单调递减。

总之用导数解决含参的函数的单调性问题的方法是一种重要的数学方法,掌握这种方法的思想,可以很好解决此类题目。

讲文明树新风 公益广告

中国精神 中国形象 中国文化 中国表达

大德 中国



中国网络电视台制

上海丰子恺旧居陈列室供稿

地址:贵州省凯里市文化南路2号 邮编:556000 电话区号:0855 广告刊登:8262760 办公室:8221006 总编室:8268388 通联部:8227615 记者部:8239930 8226625 副刊部:8262857 新闻策划部:8224704 社会新闻部:8253665 特刊部:8260266 摄影和美术编辑部:8233222 网络部:8239730 夜班编辑室:8259828 广告许可证:黔0008 黔东南天阳报业印务有限公司承印 定价:每份1.36元